数理解析研究所講究録
第 825 巻 1993 年 95-100

解析関数からなる空間上の合成作用素

信州大理　高木 啓行　(Hiroyuki Takagi)

ここ数年, いろいろな関数空間上の合成作用素の研究が, 活発に行われている. ここでは, 関数空間として, 円板環, Hardy 環, Bergman 空間をとりあげ, その上の荷重合成作用素のコンパクト性について, 議論する.

Dを 複素平面の単位開円板とし, Bを D上の解析関数 (正則関数) からなる Banach 空間とする. D上の正則関数 u と, Dから Dへの正則な関数 φ に対し, B上の作用素 uC_φを,

$$uC_\varphi f(z) = u(z)\, f(\varphi(z)) \qquad (\, z \in D,\ f \in B\,) \tag{1}$$

と定義し, それを **荷重合成作用素** (weighted composition operator) という. 荷重合成作用素の研究は, さまざまな方向から行われていて, なかでも, 等長作用素の標準表現として よく用いられる. また, u が 定数関数 1 のときは, 単に **合成作用素** (composition operator) と呼ばれ, ひとつの研究分野を 形成している. 他方, φ が Dの恒等写像の場合は, よく知られた **乗法作用素** (multiplication operator) である. なお, u や φ は, これらの作用素が Bから Bへの 有界線形作用素になるよう, あらかじめ 設定しておいてから, 論議をはじめる.

さて，われわれの研究目的は，この荷重合成作用素 uC_φの 作用素としての性質を調べることにある．ここでは，そのコンパクト性に関するものに焦点をしぼろうと思う．つまり，

どのような u と φ に対して，荷重合成作用素 uC_φは コンパクトになるか?

という問題を考える．ここで，コンパクト作用素とは，有界集合をコンパクト集合のなかにうつす作用素のことである．有界集合を弱コンパクト集合のなかにうつす場合は，弱コンパクト作用素と呼ばれる．

また，関数空間 Bとして，つぎの 3 つの空間をとりあげる:

[1] $B = A(\bar{D})$: 円板環
[2] $B = H^\infty(D)$: Hardy 環
[3] $B = L_a^2(D)$: Bergman 空間

1. $\boldsymbol{B}$が 円板環$\boldsymbol{A(\bar{D})}$の場合

円板環 $A(\bar{D})$ とは，単位閉円板$\bar{D}$上で連続で，内部 Dで正則な関数全体の関数環 (一様ノルム) のことである．いま，$A(\bar{D})$ の元 u と，$\bar{D}$を$\bar{D}$にうつす $A(\bar{D})$ の元 φ に対し，$A(\bar{D})$ 上の荷重合成作用素 uC_φを，(1)式 —Dを $\bar{D}$にかえる— で定義する．すると，作用素 uC_φは，明らかに $A(\bar{D})$ から $A(\bar{D})$ への有界線形作用素になる．そして，そのコンパクト性は，つぎのように特徴づけられる:

定理 1　$A(\bar{D})$ 上の荷重合成作用素 uC_φについて，つぎの (a) – (c) は同値である:

(a) uC_φは コンパクトである．
(b) uC_φは 弱コンパクトである．
(c) (i) φ は定数関数か，または，
(ii) $\varphi(\{z \in \bar{D} : u(z) \neq 0\}) \subset D$ が成り立つ．

この定理の (a) $\Leftrightarrow$ (c) の部分は, すでに Kamowitz [1] によって 証明されている. この定理の $A(\bar{D})$ を, 一般の関数環や さらに広い空間に おきかえた場合は, [4,5] で 述べてある.

2. $\boldsymbol{B}$が Hardy 環 $\boldsymbol{H^\infty(D)}$ の場合

$H^\infty(D)$ を, D上の有界正則関数全体の Banach 環 (一様ノルム) とする. これは, Hardy 環として よく知られている. $H^\infty(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φは, $H^\infty(D)$ の元 u と, Dから Dへの 正則な関数 φ に対し, (1) 式で 定義される. 明らかに, この作用素 uC_φは, $H^\infty(D)$ から $H^\infty(D)$ への 有界線形作用素である. コンパクト性ついては, つぎの定理が成り立つ:

定理 2 $H^\infty(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φについて, つぎの (a) - (c) は 同値である:

(a) uC_φは コンパクトである.
(b) uC_φは 弱コンパクトである.
(c) 任意の正数εに対し, $\overline{\varphi(\{z \in D : |u(z)| > \varepsilon\})} \subset D$ が成り立つ.

ただし, $\overline{}$ は 複素平面での閉包を 表す.

この定理の (a) $\Leftrightarrow$ (c) の部分で, u が 定数関数 1 の場合は, Swanton [3] の 合成作用素に関する結果につながる.

3. $\boldsymbol{B}$が Bergman 空間 $\boldsymbol{L^2_a(D)}$ の場合

Bergman 空間 $L^2_a(D)$ は,

$$\int_D |f(z)|^2 dxdy < \infty$$

をみたす D上の正則関数 fの全体で, 内積

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_D f(z)\overline{g(z)}\,dxdy$$

に関して Hilbert 空間になる. $L_a^2(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φは, $H^\infty(D)$ の元 u と, Dから Dへの正則な関数φ に対して, (1) 式で定義される. このとき, 作用素 uC_φが $L_a^2(D)$ から $L_a^2(D)$ への有界線形作用素になることが, 知られている. また, $L_a^2(D)$ は Hilbert 空間であるから, この uC_φは, つねに弱コンパクト作用素である. そこで, コンパクト性についてだけ考えると, つぎのことがいえる:

定理 3 $u \in H^\infty(D)$ は, $\lim_{|z|\to 1-}(1-|z|^2)\,u'(z) = 0$ をみたすものとする. このとき, $L_a^2(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φが コンパクトになるための必要十分条件は, つぎの式が成り立つことである:

$$\lim_{|z|\to 1-}\frac{u(z)\,(1-|z|^2)}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$$

定理 3 で, u が定数関数 1 の場合は, MacCluer and Shapiro [2] による合成作用素の結果である. また, この定理の証明も, 彼らの方法を踏襲してできる. ここで, '必要条件' の部分の証明に, u に関する条件が不要であることを, 付記しておく.

4. スペクトルについて

[1] で, Kamowitz は, 円板環 $A(\bar{D})$ 上のコンパクト荷重合成作用素のスペクトルを, 決定している. ここでは, $A(\bar{D})$ を $H^\infty(D)$ や $L_a^2(D)$ におきかえて, 同様の考察を行ってみる.

荷重合成作用素 uC_φ の スペクトルは, φ の 反復や不動点と 密接に関係している. Dから Dへの 正則な関数 φ に対し, φ の n 回反復を, φ_n ($\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n}$) と 表すと, つぎのことが いえる:

> φ が 楕円型の Möbius 変換でないとき, 閉円板 $\bar{D}$に 点 z_0が ただひとつ存在して, すべての $z \in D$に対し, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = z_0$ となる.

このことは, 古くに証明されていて, 点 z_0を, φ の Denjoy-Wolff の不動点と呼んでいる.

さて, Bを, 3 つの空間 $A(\bar{D})$, $H^\infty(D)$, $L_a^2(D)$ のどれかとしよう. u が 零関数でなく, しかも, φ が Möbius 変換のとき, 定理 1 ～ 3 から, B上の荷重合成作用素 uC_φは, コンパクトにならない. こうして, B上の零でないコンパクト荷重合成作用素 uC_φに対し, φ の Denjoy-Wolff の不動点 $z_0 \in \bar{D}$は, 必ず 存在する. この z_0が とくに D内にあるとき, uC_φのスペクトルが 決定できる:

<u>定理 4</u> (Kamowitz [1]) uC_φを, B上の コンパクトな荷重合成作用素とする. もし, φ の Denjoy-Wolff の不動点 z_0が D内にあれば, uC_φの スペクトル$\sigma(uC_\varphi)$ は, つぎのようになる;

$$\sigma(uC_\varphi) = \left\{ u(z_0)\, \varphi'(z_0)^n \,;\, n = 1, 2, \cdots \right\} \cup \left\{ 0, u(z_0) \right\}$$

引 用 文 献

[1] H. Kamowitz, *Compact operators of the form uC_φ*, Pacific. J. Math. **80** (1979), 205–211.

[2] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro, *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math. **38** (1986), 878–906.

[3] D. W. Swanton, *Compact composition operators on $B(D)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 152–156.

[4] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on function algebras*, Tokyo J. Math. **11** (1988), 119–129.

[5] H. Takagi and J. Wada, *Weakly compact weighted composition operators on certain subspaces of $C(X, E)$*, Proc. Japan Acad. **67** (1991), 304–307.